

# Förderung von Geometrie

## im und durch den Mathematikunterricht

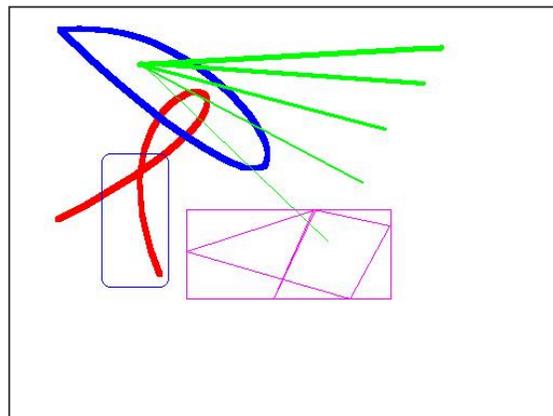
Robert Müller, Wien

Sieht man sich die Entwicklung der Lehrpläne und Studentafeln der letzten Jahr(zehnt)e an, so wird man wohl eine kontinuierliche Entgeometrisierung feststellen müssen. Auch wenn man sich umschaute, was Kolleginnen und Kollegen unter Zeitnot in ihrem Mathematik-Unterricht streichen – immerhin hat der Unterricht ja allen möglichen in so genannten Unterrichtsprinzipien verankerten Zwecken zu dienen – so rangiert hier, jedenfalls nach meiner Erfahrung, Geometrie (nach Stochastik) an prominentester Stelle. Klar, denn offenbar ist Geometrie weit unwichtiger als das Lösen komplizierter Bruchgleichungen und das Differenzieren komplexer Ausdrücke!

Diese bewusst zum Widerspruch reizen wollende Feststellung führt uns zum Kern dieses Vortrags: Was ist eigentlich Geometrie, was will und soll Unterricht in Geometrie bewirken und wie kann man dies insbesondere im und durch den Mathematikunterricht verwirklichen. Dabei kann und will der Vortrag keine abschließende Antwort geben, sondern anhand eines bunten Straußes von Beispielen die Problematik aufzeigen und paradigmatisch konkrete Umsetzungsversuche in unseren Lehrbüchern liefern.

Bleiben wir zunächst beim Begriff „Geometrie“. In der Tradition der Schule ist Geometrie zunächst einmal als Gegensatz zur Arithmetik zu verstehen – eine wie ich glaube nicht unkluge begriffliche Trennung. Hier das bildhaft-ganzheitliche, qualitative und parallele Wahrnehmen, Darstellen und Verarbeiten von Information, dort das sprachlich-teilheitliche, quantitative und sequentielle Darstellen, Wahrnehmen und Verarbeiten. Frei nach WITTGENSTEIN: „Die Grenzen unserer bildlichen Wahrnehmung und Sprache sind die Grenzen unserer Welt“

Eine vom leider viel zu früh verstorbenen Prof. Reichel gerne gemachte Übung, um diese Problematik auch bewusst zu machen, war die, ein „Bild“ wie das folgende mit „Worten“ oder auch mit „Formeln“ beschreiben zu lassen.



Beim „Geisterhaus“ mag dies via unserer (in der Umgangs- oder Fachsprache vereinbarten) Begriffe recht gut gelingen, beim „abstrakten Kunstwerk“ daneben wohl nur unzureichend. Der erkenntnistheoretische Unterschied zwischen einerseits dem geometrischen und andererseits dem arithmetisch-sprachlichen Zugang zu unserer Welt ist wohl unübersehbar. Geometrie ist eben – das sei hier den heimischen Plagiatoren angelsächsischer Schulkultur ins Stammbuch geschrieben – viel mehr als bloß eines unter den vielen Kapiteln und Unterkapiteln innerhalb (des curriculums) der „Mathematik“, es ist ein Grundkonzept unseres Denkvermögens schlechthin, wie es ja auch die moderne Gehirnforschung belegt.

Insofern kann uns der auf der Homepage der ADG ([www.geometry.at](http://www.geometry.at)) wiedergegebene Ausspruch von Josef KRAMES, ehemals Professor an der 1. Lehrkanzel für DG an der TU Wien, nicht überraschen:

*„Unbestreitbare Tatsache ist, dass ein Großteil unserer Kultur nur unter Mitwirkung geometrischen Gedankenguts zustande gekommen ist. Die Geometrie war in der Tat zu allen Zeiten eine hervorragende Schule des Geistes, ein wunderbares Ordnungsprinzip und ein gesunder Nährboden für schöpferische Gedanken.“*

Zu ergänzen bleibt, dass diese Meinung nur etwas feststellte, was Tradition hat(te). So zählte man seit Alters her Geometrie neben Rhetorik, Grammatik, Perspektive, Musik, Theologie, Philosophie, Arithmetik, Astrologie (womit Astronomie und nicht deren moderne Afterwissenschaft gemeint war) sowie Dialektik zu den zehn freien Künsten, wobei Perspektive und Astrologie auch viel mit Geometrie (im weiteren Sinn) zu tun hat. Eine pikante, nichtsdestoweniger geometrische Bemerkung am Rande sei gestattet: Diese zehn freien Künste wurden als mehr oder weniger nackte Damen (Die Künste sind allesamt grammatikalisch „weiblich“!) in Form eines Hochreliefs am Grabmal von Papst Sixtus IV (1471–1484) in Alt-St. Peter in Rom dargestellt, wobei eine der Damen „ihre Geometrie“ völlig nackt zur Schau stellt. Sie dürfen raten, welche! Die Theologie!

Geometrie ist also mehr als das Anfertigen und Lesen von Zeichnungen von Objekten („Darstellende Geometrie“), ist mehr als die „axiomatisch-konstruktive Geometrie“ angelsächsischer Prägung und mehr als die KLEIN'sche „Invariantentheorie gewisser Abbildungsgruppen“. Insofern kann meines Erachtens die Förderung von Geometrie im Mathematikunterricht nicht *allein* im Add-On einiger zusätzlicher Kapitel aus der bunten Welt der Geometrie bestehen, etwa der Wiedereinführung der Geometrie auf der Kugel (ich hatte das – damals allerdings noch nicht so empfundene – Glück dieses reizvolle und ergiebige Kapitel schon in der Schule kennen zu lernen), sondern in der steten Besinnung auf **Geometrie als Grundkonzept unseres Denkens**.

Was also kann man konkret tun?

Meine Antwort als lang gedienter Lehrer und darauf aufbauend als Lehrbuchautor haben Sie vielleicht schon der Posterausstellung im Foyer und den dort aufliegenden Exemplaren unserer Oberstufenreihe entnehmen können. (Die 8. Klasse steht unmittelbar vor Drucklegung und fehlt daher, nicht aber die darin enthaltenen Exkurse.)

Hier also *mein* Antwortversuch, der in drei Appellen an die Schülerinnen und Schüler besteht:

- 1. Öffne deine Augen für die Geometrie – sie ist allgegenwärtig, doch wir sind in unserer digitalisierten (also arithmetisierten) Welt dafür oft blind!**
- 2. Nütze geometrische Methoden, Werkzeuge und Überlegungen zum Erkenntnisgewinn (das ist mehr als nur das Visualisieren)!**
- 3. Lerne zwischen dem „geometrischen“ und dem „arithmetischen“ Modell (denken) hin und her zu wechseln!**

Gestatten Sie, diese meine Grundintentionen nun an einem bunten Strauß von Bildern zu verdeutlichen und mit einigen konkreten Anregungen und Beispielen zu würzen:

**Zu Appell 1** zeige ich einige Fotos von meiner letzten Reise – was beweisen soll, dass ich selbst mich auch an den Appell halte und man ersichtlich nicht lange nach geometrisch Ergiebigen – vom ästhetisch Schönen über das technisch Nützliche bis zum intellektuell Herausfordernden – suchen muss:

Licht sammeln und zerstreuen



Beweglich und starr



Parkettierung – Berührung und Inhalt



Licht und Schatten



„Aus“-halt und „In“-halt



Formgebung(szwänge)



Geometrische Muster



Chaos und Ordnung



Baukastenprinzip



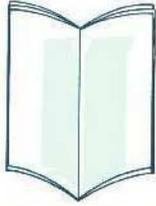
Modelle zum „Anschauen“ (virtuelle Modelle)



Modelle zum „Begreifen“ (reale Modelle)

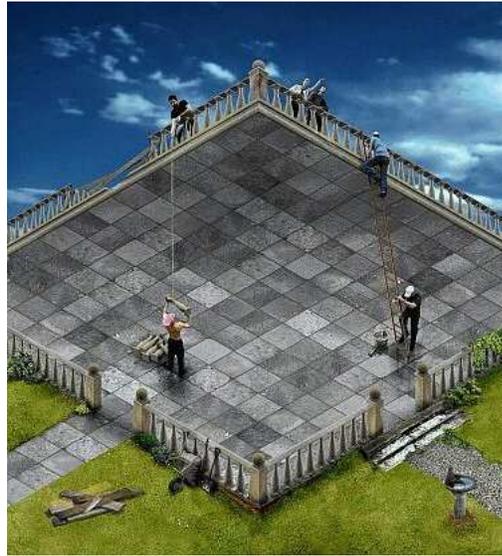


## Überlistung unseres ratiomorphen Apparates

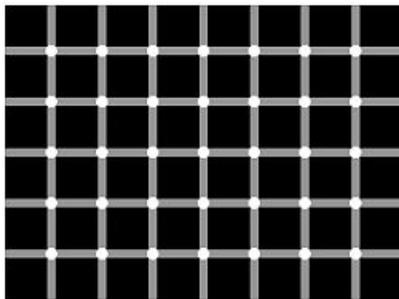


*Is The Book Looking Towards You... Or Away From You?*

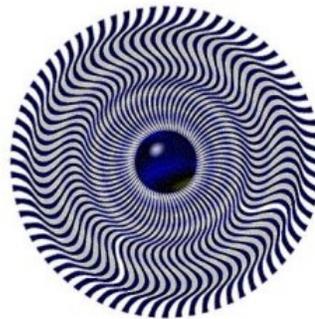
*Now here's a deal send this to atleast six people and a really cool optical illusion will pop up in ur screen in the next 2 minutes "Im telling you it is worth it"*



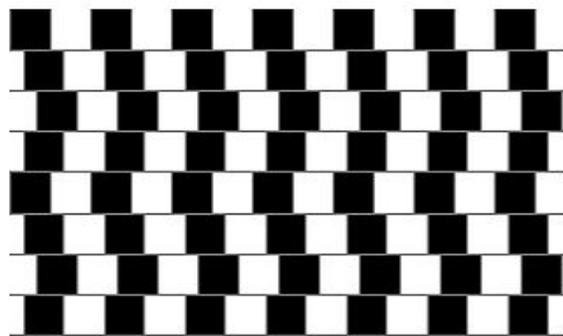
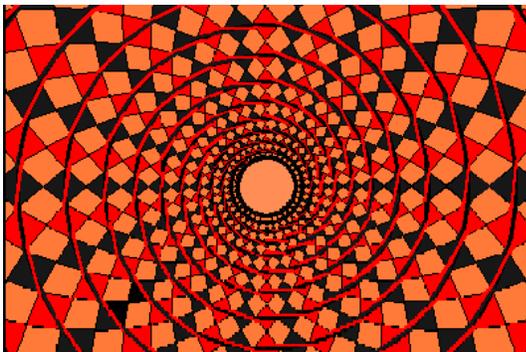
## Physiologisch nicht-nachprüfbare Sinnestäuschungen



Count the black dots! :o)



## Nachprüfbare Sinnestäuschungen



**Appell 2** ergibt sich unmittelbar aus der Notwendigkeit des Nachprüfens solcher Sinnestäuschungen mittels geeigneter Instrumente, hier etwa mit einem gewöhnlichen Zirkel und einem Paar von Linealen (etwa auch in Form eines Parallelenlineals).

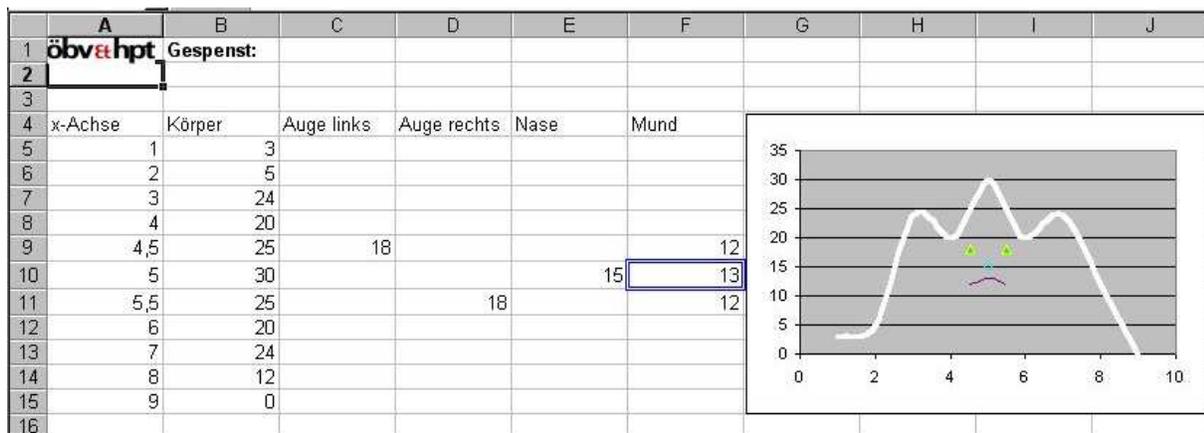
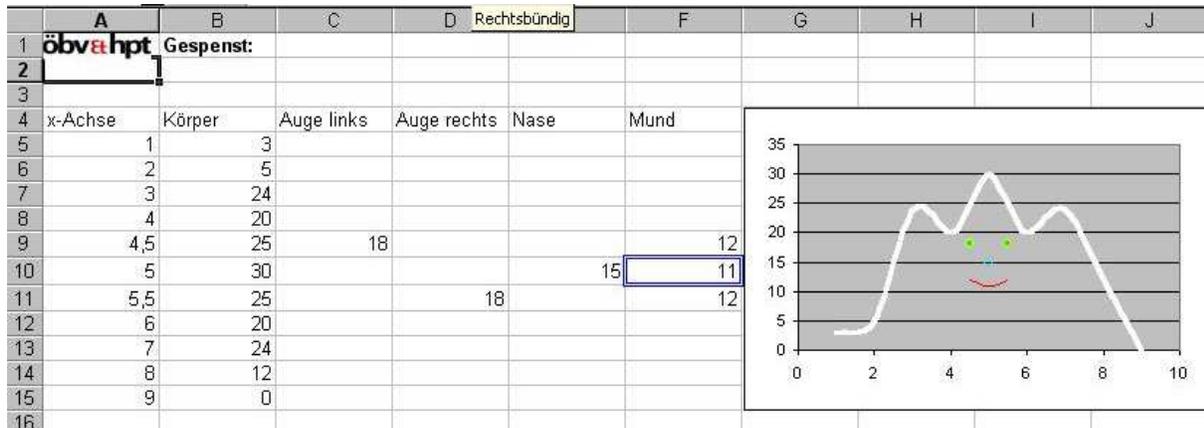
# Werkzeuge



Der Krieg ist der Vater aller Dinge



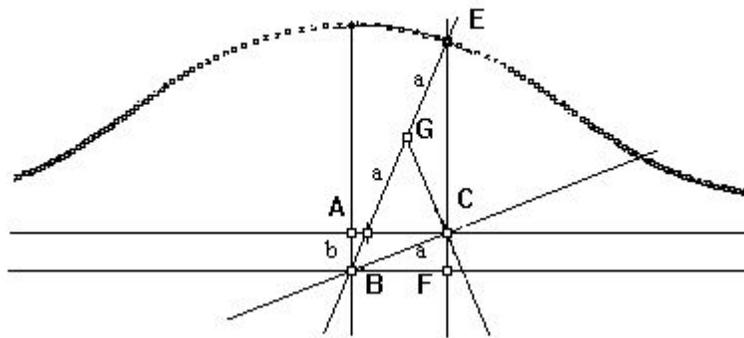
Auch Programme sind Werkzeuge



Geometrie ausschließlich mit Zirkel und Lineal ist daher keine, die allein „historisch“ legitimiert werden kann; Sie ist vielmehr einerseits eine intellektuelle Selbstfesselung und Disziplinierung (die wie im Sport zu Höchstleistungen in der jeweiligen Disziplin führt), andererseits eine (durch die Beschränkung auf quadratische Gleichungen) aus der „Arithmetik“ stammende Einengung. Mit andern Worten: Die Beschränkung stammt aus der Modellwechsel-Problematik, wie ich sie im **Appell 3** als zentrales Anliegen angesprochen habe.



So sollten wir zB beim Arbeiten mit Winkeln (wo ja schon das Halbieren mit dem Zirkel heute am Rande des vom Lehrplan erlaubten steht) nicht die (jedenfalls in meinem Unterricht immer wieder von vifen Kindern gestellte) Frage nach der Dreiteilung eines Winkels mit der Antwort „Das geht nicht“ (korrekter: „Das geht im Allgemeinen nicht exakt“) wie störendes Unkraut im sorgfältig bestellten Feld des Unterrichts sofort ausreißen, sondern dieser schönen Knospe eine Chance zum Erblühen geben, auch wenn dies meist nur außerhalb des eigentlichen Unterrichts gelingt. Sagen wir doch dem interessierten Kind, dass seine Frage eine geseichte und höchst interessante ist (auch wenn es damit nicht mehr berühmt werden kann, weil es eben um mehr als zweitausend Jahre zu spät kommt), und dass es dazu im Lehrbuch oder mit jeder guten Suchmaschine im Internet sehr viel Interessantes finden könne – hier aber leider meist viel zu vieles und auch völlig Unzutreffendes: Die Suchmaschine Google lieferte etwa zum Suchbegriff „Winkeldreiteilung“ 221 „Treffer“.



Genau deswegen darf ein Lehrbuch nicht bloß ein Schulübungsheft in gedruckter Form sein – auch wenn die ministeriellen Vorgaben einer bloßen „Grundausstattung“ den Lehrbuchautoren die Umsetzung dieses ihres Anliegens nicht gerade leicht machen. Genau deswegen gibt es jedenfalls in den Büchern, wo ich als Hauptautor tätig bin, Vorschauen, Rück- und Ausblicke sowie Exkurse, die das Interesse der Schülerinnen und Schüler wecken und auch teilweise zu befriedigen suchen. Lassen Sie mich dieses Anliegen und die Umsetzung der obigen drei Appelle an einem mehr an thematischen Schwerpunkten denn der Chronologie orientierten Streifzug durch diese Exkurse konkret erläutern.

Zunächst: Das Punktmodell wird wie selbstverständlich in der Geometrie verwendet (obwohl es eigentlich über  $n$ -tupel ein arithmetisches Modell ist) – trotz allerlei Problemen, wie dem „exakten Halbieren“ eines Quadrates längs einer Diagonalen (zu welcher Hälfte gehört dann der Mittelpunkt?) oder der Tatsache, dass jedes Teilintervall der Zahlengeraden „gleich viel“ Punkte hat wie die Zahlengerade selbst. Solche Fragen thematisiert der Exkurs „Merkwürdiges von unendlichen Mengen“ in der 5. Klasse (und bewusst wieder aufgreifend der Exkurs „Stufen im Unendlichen“ in der 6. Klasse):



Acrobat Reader - [RM5-10.PDF]

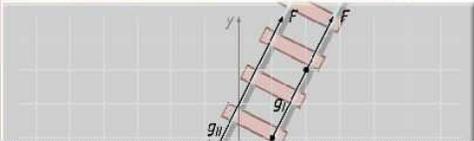
Exkurs **Geradewegs ins Unendliche**

Beim Untersuchen, wann ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen *unlösbar* ist, haben wir uns auf einen geometrisch *offensichtlichen* Tatbestand berufen: zwei zueinander parallele Geraden besitzen keinen Schnittpunkt! Ist dies wirklich *offensichtlich*?



glauben. Sie ist das ebene (zweidimensionale) *Abbild* einer räumlichen (besser: von uns dreidimensional *erlebten*) „Wirklichkeit“.

In diesem Sinn *kann* die Mathematik für zwei parallele Geraden  $g_I$  und  $g_{II}$  einen Schnittpunkt als *existent* annehmen, wobei dieser Punkt jedoch unendlich weit entfernt liegt und man ihn daher als **Fernpunkt**  $F$  bezeichnet. *Alle* zu  $g_I$  (und damit auch  $g_{II}$ ) parallelen Geraden gehen durch diesen Fernpunkt. Mit anderen Worten: Alle Geraden, die die *gleiche* Steigung  $k$  haben, besitzen den *gleichen* Fernpunkt  $F$ . Umgekehrt gehören zu einem Fernpunkt unendlich viele Geraden, die untereinander parallel sind, kurz: eine Schar paralleler Geraden. Formal ausgedrückt besteht also zwischen den Fernpunkten und den Geraden eine **Zuordnung** folgender Form:  $F \frac{\infty}{1} g$ .



217% | 1 von 2 | 160,2 x 230 mm

Acrobat Reader - [RM5-10.PDF]

Die Lösung ist ein gleichermaßen einfacher wie genialer Trick! Wir schreiben die Koordinaten der Punkte wie folgt:

$$\left(\frac{1}{1} \middle| \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{0,5} \middle| \frac{2}{0,5}\right), \left(\frac{1}{0,1} \middle| \frac{2}{0,1}\right), \dots, \left(\frac{1}{0,001} \middle| \frac{2}{0,001}\right),$$

$$\left(\frac{1}{0,0001} \middle| \frac{2}{0,0001}\right), \dots, \left(\frac{1}{0,000001} \middle| \frac{2}{0,000001}\right), \dots$$

Jeder Punkt wird nun statt durch *zwei* Zahlen durch *drei* Zahlen festgelegt – die beiden Zähler und den gemeinsamen Nenner – die man (in Anlehnung an die übliche Schreibweise) der Reihe nach in der Form  $(1/2/1)$ ,  $(1/2/0,5)$ ,  $(1/2/0,1)$ ,  $\dots$ ,  $(1/2/0,001)$ ,  $(1/2/0,0001)$ ,  $\dots$ ,  $(1/2/0,000001)$  notieren könnte. (Verwechsle dies nicht mit Raumkoordinaten – wir bewegen uns in der gewohnten zweidimensionalen Zeichenebene!)

Indem der Nenner immer kleiner werdend gegen null strebt, wachsen die Werte der Brüche „über alle Maßen“, streben also gegen unendlich. Mit anderen Worten: Solange die dritte Zahl (= Nenner) ungleich null ist, erhalten wir einen vom Ursprung *endlich* weit entfernten Punkt der Geraden; ist der Nenner null, so erhalten wir einen *unendlich* weit vom Ursprung entfernten Punkt der Geraden, also deren Fernpunkt  $F$ . Der Fernpunkt der Geraden  $y = 2x$  hat daher die „Koordinaten“  $(1/2/0)$ .

Dennoch gibt es ein Problem. Erstellt man das obige Bild mit einem Fischaugen-Objektiv, so scheinen die Gleise zwei Schnittpunkte zu haben (Fig. 3). Und daran ist nicht allein die optische Verzerrung schuld! Denn gemäß Fig. 2 kann man ein Geradenpaar nach rechts oben „ins Unendliche“ verfolgen, genauso gut aber auch nach links unten. Besitzt daher jede Gerade *zwei* Fernpunkte?

Die Antwort wird dich überraschen. Das können wir halten, wie wir es wollen. Üblicherweise identifiziert man diese beiden Punkte. Mit anderen Worten: Verfolgt man die Gerade nach links unten, so gelangt man zum *gleichen* Fernpunkt, wie wenn man der Gerade nach rechts oben gefolgt wäre. Dass diese Vorstellung Sinn macht, wollen wir an einem Gedankenexperiment zeigen.

Denken wir uns die Zeichenebene zu einem Drehzylinder mit unendlich großem Radius zusammengerollt, gerade so, dass der „linke“ Fernpunkt und der „rechte“ Fernpunkt aufeinander zu liegen kommen. Eine Gerade wird so zu einer (über das Unendliche) geschlossenen Kurve. Wegen des unendlich großen Radius ist die Krümmung des Zylinders für uns jedoch nicht merkbar – wir zeichnen weiterhin „eben“ und „geradlinig“ ohne auf Widersprüche zu

217% | 2 von 2 | 160,2 x 230 mm

Letztlich spielt dieses Problem auch in den Exkurs „Die gar nicht trivialen Begriffe ‚Flächeninhalt‘ und ‚Rauminhalt‘“

Acrobat Reader - [Exkurs-Kap2.pdf]

Die Datei Bearbeiten Dokument Anzeige Fenster Hilfe

# Exkurs Die gar nicht trivialen Begriffe

## Gibt es einen 2,72-dimensionalen Körper?

Die überraschende Antwort ist: ja. Am hinteren Buchumschlag kannst du ihn sehen – jedenfalls in erster Annäherung. Genau genommen ist es nämlich ein Körper, den wir gar nicht mehr zeichnen, sondern uns nur mehr vorstellen können. Dieses Gebilde heißt nach seinem Erfinder, dem österreichischen Mathematiker Karl MENGER (1902–1985), **MENGER-Schwamm**. Wie jeder Schwamm hat dieser Körper „Löcher“, die auf folgende Art entstehen. Ausgehend von einem Würfel der Seitenlänge  $a$  wird in einem ersten Schritt das „mittlere Kreuz“ entfernt, dh. man denkt sich den Würfel in 27 kongruente Teilwürfel der Seitenlänge  $a/3$  zerlegt und entfernt die „mittleren“ 7 Teilwürfel. Jeden der übrigbleibenden 20 Teilwürfel behandelt man in einem zweiten Schritt in analoger Weise, sodass weitere  $20 \times 7$  Teilwürfel der Seitenlänge  $a/9$  entfernt werden. In einem dritten Schritt werden die verbleibenden  $20 \times 20$  Würfelchen in analoger Weise durchlöchert, usw.

Denkt man sich diesen Prozess bis in alle Ewigkeit fortgesetzt, so entsteht ein Körper, der die

„mittlere Quadrat“. Jedes der 8 verbleibenden Quadrate behandelt man in einem zweiten Schritt in analoger Weise, sodass weitere 8 Quadrate der Seitenlänge  $a/9$  entfernt werden. In einem dritten Schritt werden die verbleibenden  $8 \times 8$  Quadrate in analoger Weise durchlöchert, usw. Denkt man sich den Prozess wieder bis in alle Ewigkeit fortgesetzt, so entsteht ein Gebilde, das als **SIERPINSKI-Teppich** bezeichnet wird. Den Flächeninhalt (Materialverbrauch)  $A$  dieses Teppichs erhält man als Grenzwert wie folgt:

$$A = a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{a}{3^2}\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{a}{3^3}\right)^2 - \dots =$$

$$= a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \cdot \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \dots\right)\right) =$$

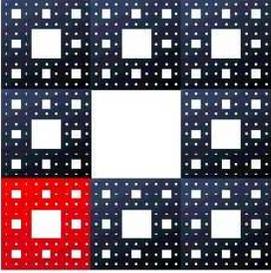
$$= a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}}\right) = a^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{1}\right) = a^2 \cdot 0 = 0$$


Fig. 1

203% 0 (1 von 2) 171,1 x 240,9 mm

und in den Dimensionsbegriff hinein, der schon vor den obigen Überlegungen zu Fraktalen in der 5. Klasse unter „Gibt es eine eindimensionale Geometrie“

Acrobat Reader - [RM5-12.PDF]

Die Datei Bearbeiten Dokument Anzeige Fenster Hilfe

Der arme Wurm kann sich darin nur nach vorne sicher bewegen, da er nur dort sieht, nach hinten muss er sich vorsich-

einer flachen (ebenen) Erde einer gekrümmten „Erdkugel“

dem berühmten ERATHOSTENE zu messen, ist beauf (oder gemäß theorie in) einer che leben. Es ist – auch wenn dies ligiöser Verblenc hunderte später g dem Scheiterha wurde.

Analoge Überlegu Wurmwissenschaf festzustellen, ob raden oder gekrü

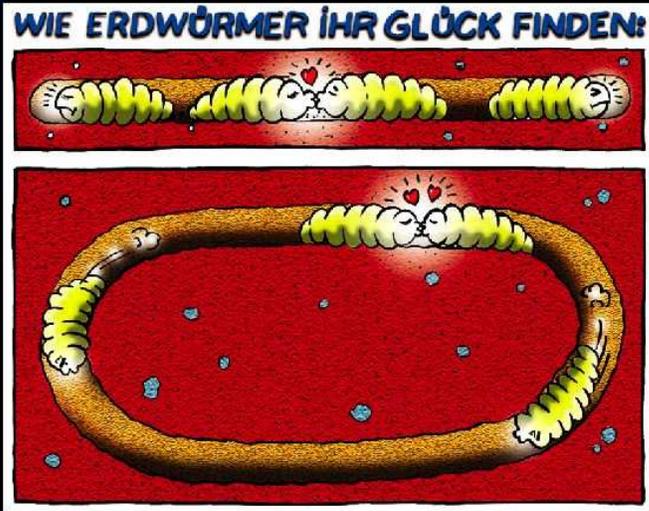


Fig. 1

300% 1 von 2 160,2 x 230 mm

Phantasterei? Wir leben doch in einer dreidimensionalen Welt!  
Wir tun dies – aber tun dies auch wieder nicht!  
Du bist schon mit Aufzügen gefahren. Der Aufzugsschacht ist eine eindimensionale „Schlauch“-Innenwelt endlicher Länge, die Kabine entspricht einem Wurm (wobei dieser arme Wurm ein Einsiedlerdasein fristen muss). Die Schwerkraft wird entlang dieser Welt (so wie in unserer dreidimensionalen Welt) als *gleichförmig* erlebt.

**ZUSAMMENSTOSS ODER NICHT?**



Fig. 3: Möbiusschleife

Du bist schon mit der Hochschaubahn gefahren – und hast dich damit einer (im Prinzip) eindimensionalen „Schlauch“-Außenwelt anverwandelt! Zum Unterschied zum Aufzug handelt es

beifahren“ möglich? **Überlege!**  
Waggons sind i.A. apolar, sie haben keine bevorzugte Vorder- oder Rückseite. Sie entsprechen den Wurm-Kindern. Triebwagengarnituren hingegen sind oft polar – der Führerstand ist nur auf einer Seite eingerichtet; sie entsprechen den erwachsenen Würmern. Die obigen Überlegungen zur „Brautschau“ der Würmer entsprechen Problemen, wie sie im Prinzip tagtäglich beim Rangieren und Zusammenstellen von Zügen unter Berücksichtigung der Gleis topology und der Länge der beteiligten Wagen gelöst werden müssen. Losgelöst von der Praxis (Fig. 4) sind solche Rangierprobleme auch als Denksportaufgaben sehr beliebt:



Fig. 4

und in der 6. Klasse unter dem Titel „Ausflug in die vierte Dimension“ thematisiert wird:

geachtet aber (rechnerisch und graphisch) durchführen können wir die Verschiebung des 3-dimensionalen Kubus um seine Seitenlänge in der zum Trägerraum des Würfels orthogonalen Richtung.

So wie Fig. 2c das 2-dimensionale „Foto“ eines 3-dimensionalen Würfels ist, so ist Fig. 2d das 2-dimensionale „Foto“ eines 4-dimensionalen Würfels. Auch wenn daraus die „Hyper-Räumlichkeit“ schwer erfahrbar ist, so bietet das Foto doch eine Menge Information. So kann man darin direkt

kann. Eine dieser Möglichkeiten hat der berühmte Maler Salvator DALI in seinem Gemälde „Christus Hyperkubus“ (1954) dargestellt. Dieses Zusammentreffen zwischen Mathematik und Kunst ist kein einzelnes und kein zufälliges. Mathematik ist nicht bloß „Rechnen“.

**Wie die Kunst ist Mathematik kreativ, innovativ und voll Phantasie und damit ein wesentlicher und unverzichtbarer Teil unserer Kultur und unseres kulturellen Fortschritts!**

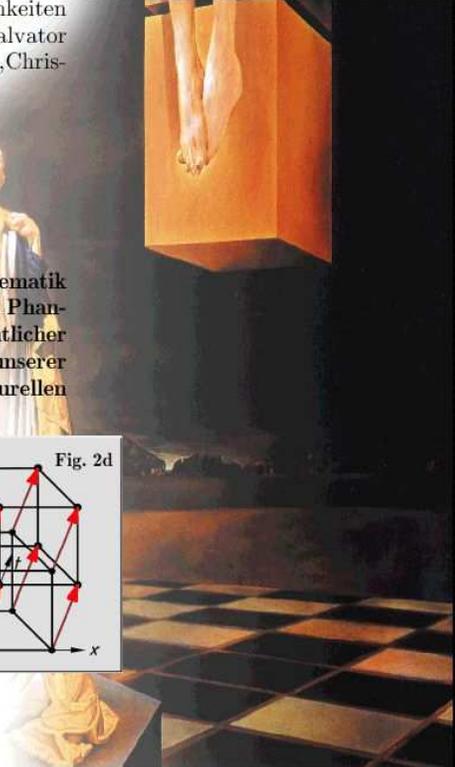
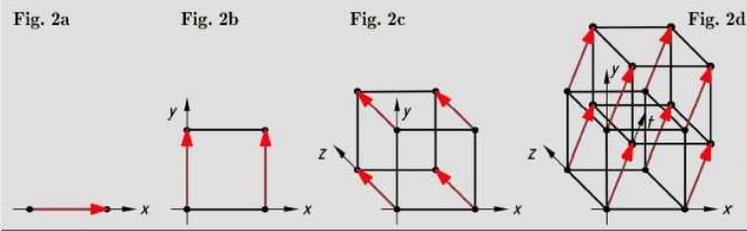



Fig. 2a      Fig. 2b      Fig. 2c      Fig. 2d

Die Frage nach der „Realität“ solcher (ungewohnter, aber denkmöglicher) Welten wird im Exkurs „Leben wir in einer Vollwelt oder in einer Hohlwelt“ gestellt:

Acrobat Reader - [RM7-01.PDF]

in der Hohlwelt Tag und Nacht – ganz so wie in der Vollwelt. **Erkläre!**

Alge-  
dlich  
e In-  
punkt  
 $\frac{1}{d}$   
eis  $g^\circ$   
 $\frac{1}{2d}$   
Dh.,  
muss  
hnen  
egen

Fig. 4

Fig. 5

Analog zeigt Fig. 5, wie auch für einen Bewohner der Hohlwelt die Mastspitze vor dem Schiffsrumpf sichtbar wird. Auch dieses Phänomen

400% 2 von 2 160,2 x 230 mm

Natürlich hat man sich aber auch mit „unserer Welt“ in gewohnter Weise auseinander zu setzen, etwa in Hinblick auf ihre Gestalt (Exkurs „Landvermessung einst und jetzt“)

Acrobat Reader - [RM6-02.PDF]

schon mit Kontrollmessungen gesorgt. Vielmehr waren es systematische und unsystematische Fehler.

schiedener Berücksichtigung der Abplattung) zur systematischen Korrektur der Messergebnisse als Bezugsfläche für die Längen- und Breitengrade von Punkten auf der Erde verwendet. In Österreich verwendete man das von dem bedeutenden Astronom und Mathematiker F. W. BESSEL 1841 entworfene BESSEL-Ellipsoid. Der zugehörige Triangulierungs-Hauptpunkt ist die Habsburgswarte auf dem Hermannskogel in Wien mit der 1892 bestimmten geographischen Breite  $48^\circ 16' 15,29''$  und der geographischen Länge  $33^\circ 57' 41,06''$  östlich von Ferro, einer Insel im Atlantik.

300% 1 von 2 160,2 x 230 mm

Acrobat Reader - [RM6-02.PDF]

Exkurs **Landvermessung einst**

Beim klassischen Vermessen (vgl. Kap. 2.9) werden Distanzen und Winkel im „lokalen“ Bereich gemessen und mittels der Trigonometrie fehlende (weil nicht direkt messbare) Distanzen und Winkel berechnet. Auf diesem Prinzip aufbauend überzog man – ausgehend von möglichst genau gemessenen Basisstrecken – das Land mit einem Gitter von Dreiecken, deren Ecken durch mehr oder weniger auffällige Signalpunkte markiert wurden. Mit anderen Worten: Ausgehend von lokalen Messungen (Basisstrecken) schuf man ein regionales oder sogar überregionales Netz von Bezugspunkten, von denen aus man (bei Bedarf) lokale Vermessungen durch „Verdichtungen der Maschenweite“ vornehmen konnte. Auf diese Art wurde in der 2. Hälfte des 19. Jh. für das Gebiet der Österreich-Ungarischen Monarchie ein Netz 1. bis 6. Ordnung geschaffen. Mit noch anderen Worten: Man schuf eine Art Koordinatensystem.

Ein Grund war und ist zB der, dass Visierlinien beim Durchlaufen von (aufgrund unterschiedlicher Höhe und Temperatur) verschieden dicht gelagerten Luftschichten geringfügig „verbogen“ werden (Fig. 1 unten).

Im Zuge des technischen Fortschritts wurden die Mess-

217% 1 von 2 160,2 x 230 mm

oder mit speziellen Phänomenen auf ihr (Exkurs: „Mathematik der Überschwemmungen“ in der 8. Klasse):

Acrobat Reader - [Exkurs-Kap3.pdf]

**Fig. 1**

**Wasserführung des Kamp vom 7. bis 17. August 2002**

$m^3/sec$

700  
600  
500  
400  
300  
200  
100

7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17.

Pegel  
Zweiflousgefallen

Jahresmittelwert  
7,5  $m^3/sec$  Abgabe

Hochwasser 1996  
150  $m^3/sec$  Abgabe

Die Mathematik kommt aber noch in vielerlei anderer Hinsicht ins Spiel. Betrachten wir dazu die folgende Grafik (Fig. 1) in der die EVN als Betrei-

wurde  
bauten  
viel M  
solche  
nem fi  
wohl w  
genieu  
bewält  
schwie  
„Bei s  
Donau  
schnitt  
spricht  
wird d  
übersc

400% 0 (1 von 2) 171,1 x 240,9 mm

ermitteln. Dabei wird die Zeit  $x$  in Tagen und die Wassermenge  $y$  in 100 Mill.  $m^3 = 10^8 m^3$  gemessen. Die Rechnung überlässt man – wie in der Praxis üblich – dem Computer, hier dem TI-92 (Fig. 2):

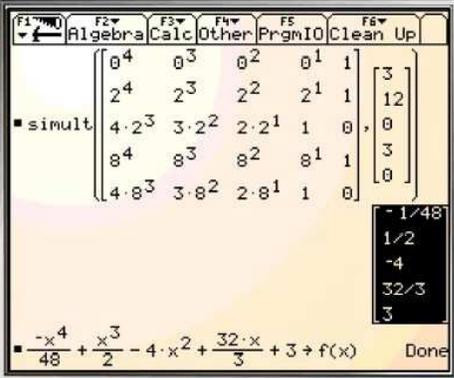


Fig. 2

Aus der Funktionsgleichung kann man nun mittels der Differential- und Integralrechnung einige wichtige Fragen beantworten, etwa: Wie schnell steigt der Wasserspiegel und wann wird er eine bestimmte (kritische) Höhe erreicht haben? Demgemäß wird man Schutzmaßnahmen treffen.

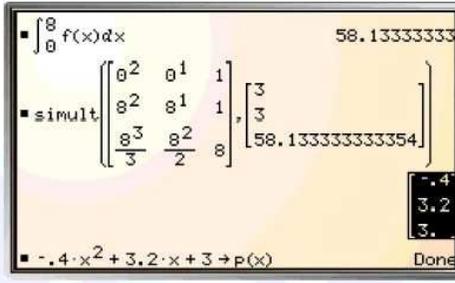


Fig. 3

Der Scheitelpunkt von  $p$  liefert mit seiner (auf  $m^3$  pro Sekunde umgerechneten)  $y$ -Koordinate für die maximale Wasserführung der *gekappten* „Spitze“ der Flutwelle knapp 11 000  $m^3$  pro Sekunde gegenüber den knapp 14 000  $m^3$  der *ungekappten*.

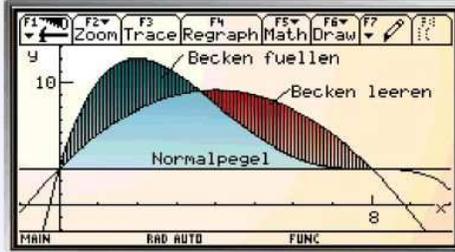


Fig. 4

Zu unserer Welt gehört auch die „Welt des Mammons“. Im Exkurs „Wie rechnet der Finanzminister“ (5. Klasse) wird unserer Einkommensteuersystem (*auch geometrisch*) behandelt,



**TARIFSTUFEN ab 2000:**

| Einkommen                    | Prozentsätze |
|------------------------------|--------------|
| bis 50.000 S                 | 0%           |
| über 50.000 S bis 100.000 S  | 21%          |
| über 100.000 S bis 300.000 S | 31%          |
| über 300.000 S bis 700.000 S | 41%          |
| über 700.000 S               | 50%          |

↳ BEISPIEL:  
Das steuerpflichtige Jahreseinkommen 2001 beträgt 290.000 S. Davon fallen 50.000 S in die erste Tarifstufe zu 0%, 50.000 S in die zweite Tarifstufe zu 21% (10.500 S) und die restlichen 190.000 S in die dritte Tarifstufe zu 31% (58.900 S). Tarifsteuer ohne Absetzbeträge daher 69.400 S.

Die obige Erklärung richtet sich auf den „Normalbürger“, nicht an Steuerrechtler. Besonders ausgebildete Menschen.

**Hast du das System und das Beispiel verstanden?**

Wenn nicht, so solltest du unbedingt weiterlesen – denn auch du wirst einmal Steuerzahler sein (müssen)!

bis zu einem Jahreseinkommen von 1 Mill. S.

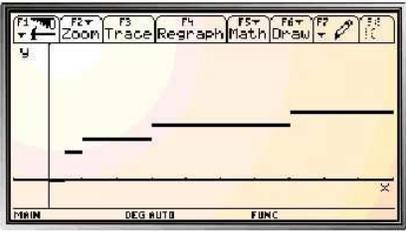


Fig. 1

Allerdings kann man daraus nicht unmittelbar die Höhe der Steuer in Schilling ablesen, sondern muss sie gemäß dem obigen Beispiel stufenweise berechnen. Was wir uns wünschen, ist eine Funktion, die jedem Jahreseinkommen  $x$  unmittelbar die zu entrichtende Steuer  $y$  in S zuordnet. Fig. 2 zeigt den Graphen dieser Funktion (1 Teilstrich steht für 100 000 S).

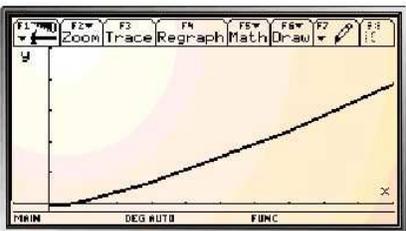


Fig. 2

im Exkurs „Futures&Optionen“ (6. Klasse) wie und wann man die zu versteuernden Gewinne erst einmal lukriert

Acrobat Reader - [RM6-09.PDF]

(grüne / rote Kurve) seinen Gewinn bzw. Verlust in Abhängigkeit vom Kurs. **Erläutere!**

Fig. 3

Gewinnbereich LP

Gewinnbereich LC

Verlustbereich LP

Verlustbereich LC

Gewinn/Verlust

Kurs

20

15

10

5

0

-5

-10

80 90 100 110 120

95 105

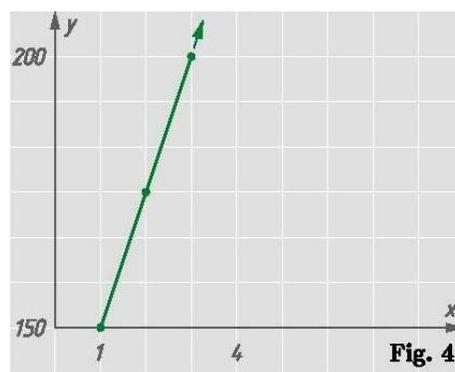
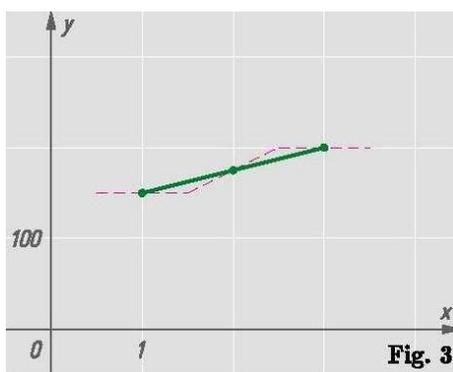
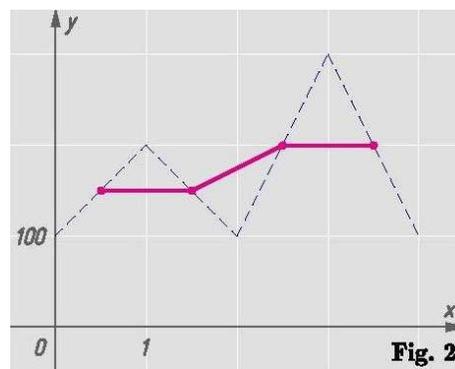
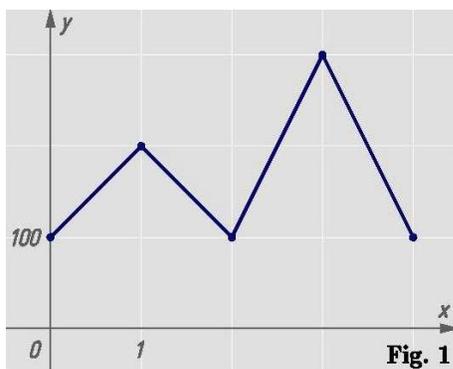
300%

2 von 2

160,2 x 230 mm

at, Zinssatz und Dividenden ein-  
len). Ein großer Erfolg in Form d  
BLACK & SCHOLES-Gleichung  
tung von Optionen führte 1997 z  
für Wirtschaft – für *Mathemat*  
nen Nobelpreis!

– besser: glaubt lukrieren zu können (Exkurs „(Be-)Trügerische Mathematik – Bedenkenswertes und Kurioses zum ‚lockeren‘ Umgang mit Statistik“) –



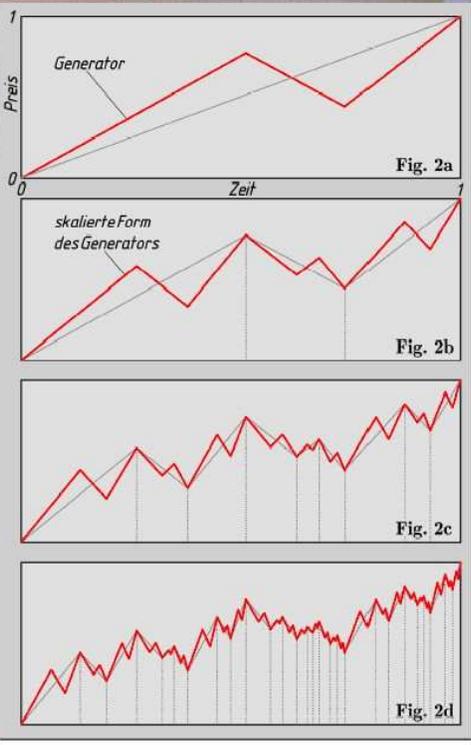
bis hin zu den katastrophalen Folgen unreflektierter Börsengläubigkeit (Exkurs: „Börsencrash – ein Versagen der Mathematik?“).

Acrobat Reader - [Exkurs-Kap4.pdf]

kaufen den „Leittieren folgend“ (in der Hoffnung) auf möglichst große Gewinne bzw. möglichst kleine Verluste. Dass dieses Verhalten (gespeist durch Insiderwissen) von Großaktionären gezielt dazu verwendet wird, um Kurse nach oben oder unten zu drücken, ist eine Tatsache. Hier zu moralisieren hat wenig Sinn! Wer will nicht (möglichst viel) gewinnen? Vielmehr gälte es (internationale Spielregeln geeignet(er) festzulegen und (bessere) Werkzeuge zur Marktstabilisierung zur Verfügung zu stellen. Schon existente Maßnahmen sind die Strafandrohung für Insidertrading, Stützungskäufe von Notenbanken (zur Festigung des Wechselkurses zwischen verschiedenen Währungen) oder das (vorübergehende) Aussetzen des Handels an der Börse (um der Panik eine Abkühlungspause zu gönnen). Zu den Maßnahmen gehört insbesondere auch die Grundlagenforschung über das Verhalten *dynamischer Systeme* (wie sie zB Kursentwicklungen an der Börse darstellen). Berühmt wurde hier in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts der französische Mathematiker René THOM (1923-2002) mit seiner **Katastrophentheorie**.



René THOM



Preis  
Zeit  
Generator  
Fig. 2a  
skalierte Form des Generators  
Fig. 2b  
Fig. 2c  
Fig. 2d

203% 1 (2 von 2) 171,1 x 240,9 mm

Der „Generator“ der Kurve führt zur Frage, „Wie Kurven *wirklich* erzeugt werden“, zu

Acrobat Reader - [RM7-03.PDF]

gedreht. Damit hat sich auch die Strecke  $M_2X$  um  $M_2$  durch  $\alpha_2$  weitergedreht. Diese Aussage bezieht sich aber auf das *Gangsystem*! Bezogen auf das *Rastsystem* hat sich die Strecke  $M_2X$  durch den Winkel  $\alpha_1 + \alpha_2$  weitergedreht! **Begründe!**

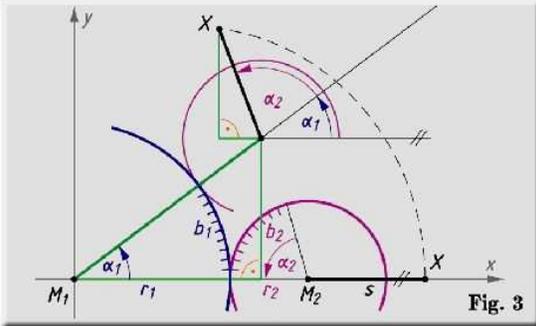


Fig. 3

Daraus kann man auch ohne Zeichnung erkennen – **Begründe!** – dass bei *Innenabrollung* eines Kreises in einem doppelt so großen Kreis nicht mehr eine nierenförmige Kurve entsteht, sondern eine *Strecke*! Ja, du liest richtig: Man kann mit geeigneten *kreisförmigen* Bewegungen *exakt geradlinige* Bewegungen erzeugen! Hättest du gedacht, dass es einen „Zirkel“ zum Zeichnen von Strecken gibt?

Ja noch mehr: Dass es „Zirkel“ zum Zeichnen von Ellipsen, Hyperbeln und vielen anderen Kurven gibt?

Wolltest du immer schon einem dir lieben (und mathematisch gebildeten) Menschen etwas „Herziges“ schreiben? Schreib ihm einen „mathematischen Liebesbrief“! Schreib ihm (Fig. 4):

„Mein ganzes  
 $x = 3 \cdot \cos t$   
 $y = 3 \cdot \sin t + 3 \cdot |\cos t|$   
 gehört nur Dir.“



Fig. 4

250% 2 von 2 160,2 x 230 mm

Radlinien und Freiformkurven („Von Fadengrafiken zu BÉZIER-Kurven“) in der 7. Klasse und zur

Acrobat Reader - [RM7-02.PDF]

dx =  $\frac{d(2t - 1)}{dt} = 2$   
 dy =  $\frac{d(2t - 2t^2)}{dt} = 2 - 4t$

Auf die gesuchte Steigung kommen wir über die folgende (durch die Kettenregel und das Rechnen mit Differenzialen gedeckte) Umformung

dy =  $\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 - 4t}{2} = 1 - 2t$

Man sieht: Die obige Vermutung war richtig!

Insgesamt ergeben sich folgende Aussagen:

1. Die einhüllende Kurve ist eine ganz besondere Kurve, nämlich eine *Parabel*.
2. Die Hüllkurve berührt das Polygon ABC in seinen Endpunkten A und C.
3. Der Berührungspunkt  $T_{ab}$  jeder Berührstrecke  $T_a T_b$  teilt diese im gleichen Verhältnis wie die Punkte  $T_a$  und  $T_b$  ihrerseits die Seiten a und b des Polygons ABC teilen.

Fig. 2a

Fig. 2b

kann, ist man (insbesondere an stellen“) doch nicht genügend flex

Es ist das Verdienst von Pierre BL CASTELJAU, dies erkannt und Fadengrafik *rekursiv* auf Kontroll n Kontrollpunkten verallgemein

300% 2 von 2 160,2 x 230 mm

Abstraktion in Richtung (rein) topologischer Darstellungen, wie sie in „U-Bahn-Plänen“ oder

Acrobat Reader - [RM5-11.PDF]

Fig. 2 zeigt den U-Bahn und S-Bahn Plan von Berlin. Die Wahl des kürzesten Weges ist ein

Wie soll man diesen Dienst in Anspruch genommen v

Fig. 2

tengüns  
 Die h  
 mathen  
 finden  
 kehrsw  
 dern g  
 kommu  
 der Fr  
 sicherer  
 e-mail-  
 dungen  
 der Ko  
 straßen

Mather  
 bar sei  
 gegenw

Berlin

Berlin

300% 2 von 2 160,2 x 230 mm

Fig. 2

VOLLADDIERER

Dual - Ziffern a b c

Alter Übertrag

x Summe

y Übertrag

Ab Mitte der 40er-Jahre... Österreicher Robert von

<sup>1</sup> Der heute übliche Begriff Fehler in der Hardware (programms) rührt von Relais eingeklemmt wurde untüchtig machte.

verwendet werden, und letztlich hin zu den typischen graphentheoretischen Darstellungen.

Wir haben uns in diesem Kapitel auch mit der Lösung von Aufgaben beschäftigt, in denen nach dem Extremwert (*Maximum* oder *Minimum*) einer Größe (*Zielgröße*) unter gewissen einschränkenden Bedingungen gefragt wurde. Dabei haben wir uns auf Aufgaben beschränkt, bei denen die Zielgröße  $z$  von zwei Variablen  $x$  und  $y$  *linear* abhängt, und wo auch die einschränkenden Bedingungen in Form *linearer Ungleichungen* dargestellt werden können. Das Lösen solcher Aufgaben heißt **lineares Optimieren**, im Englischen **linear programming**. Lineare Optimierung ist eine sehr junge Disziplin in der Mathematik. Als ihr Begründer gilt der

des vergangenen Jahrhunderts, als man möglichst kurze und billige Wege für Tankwagen finden wollte, die in gewissen regelmäßigen Abständen sämtliche Tankstellen des Landes beliefern mussten. Wie sollten die Lieferfirmen ihre Wege und Zeiten anlegen?

Fig. 1

Die hier ins Spiel kommenden Optimierungsprobleme sind oft von „geometrischer Natur“ – wie das im folgenden Exkurs (7. Klasse) behandelte:

**Exkurs**

## Bringen wir ihn um die Ecke?

Hier handelt es sich natürlich nicht um eine Anfrage in mörderischer Absicht, auch wenn es um eine Erbschaft geht. Vielmehr geht es um ein Problem, wie es sich häufig in modernen Wohnungen mit ihren schmalen Türen und Gängen und niedrigen Raumhöhen stellt: Schaffen wir es, den wunderschönen alten Kasten, den uns Onkel Walter hinterließ, auf konventionellem Weg an den gewünschten Platz in der Wohnung zu transportieren. Das wollen wir wissen, *bevor* wir den Kasten vier Stockwerke hinauf getragen haben und irgendwo stecken bleiben. Die rechtzeitige Antwort darauf kann die Mathematik liefern!

Im vorliegenden Fall hat der (im Wesentlichen) quaderförmige Kasten die folgenden Abmessungen: Breite (= Kastentiefe)  $b = 0,75$  m, Länge (= Kastenbreite)  $l = 2,25$  m, Höhe  $h = 1,95$  m.

boden (= Rastsystem), welche durch das Gleiten der Endpunkte A und B der Strecke AB an zwei Fußbodenkanten zwangsgeführt wird (Fig. 2). Die Strecke CD hüllt dabei eine Kurve ein, die ersichtlich die Mauerecke bei P nicht schneiden darf. **Erläutere!**

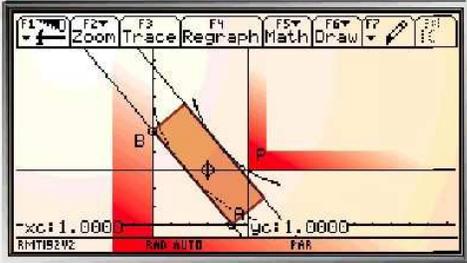


Fig. 2

Und weil Verben immer etwas Abschließendes an sich hat, will auch ich hier schließen. Verben wir den uns anvertrauten Schülerinnen und Schülern ein wenig von unserer eigenen **Begeisterung für Geometrie** – insbesondere auch im und durch den Mathematikunterricht. Lehren wir sie „Sehen“ und „visuell Begreifen“. Ich wünsche Ihnen dabei gutes Gelingen und mir, dass ich mit diesem Vortrag zum Gelingen ein wenig beitragen konnte!

### Literatur:

REICHEL, GÖTZ, MÜLLER, HANISCH u.a.:

### Lehrbuch der Mathematik

für die 5. bis 8. Klasse der AHS,  
4. und 5. Auflage,

Verlag öbv&hpt, Wien 1989–2004

Die **zu diesem Vortrag gehörige PowerPoint-Präsentation** (64 MB!!) kann von der Adresse [www.geometry.at/strobl/strobl2003/plan2003.htm](http://www.geometry.at/strobl/strobl2003/plan2003.htm) heruntergeladen werden.